1ο ΓΕΛ ΠΕΥΚΩΝ

Θέμα : Η μέθοδος Μελέτης Μαθήματος" Lesson Study " στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο .

Ομάδα Μελέτης Μαθήματος : Βασιλειάδου Ευαγγελία(ΠΕ03)

Κουτσφετσούλη Ευανθία(ΠΕ03)

Μουρατίδου Μαρία (ΠΕ03)

Μπάμπουρας Γεώργιος (ΠΕ03)

Τσίτσος Γεώργιος (ΠΕ03)

Ειδικοί/Επιμορφωτές: Εμμανουηλίδης Αριστείδης (ΠΕ04.01,Διευθυντής)

Τσαμπούκα Πετρούλα (ΣΕΕ ΠΕ03 Δυτικής Θεσσαλονίκης)

Γλωσσική επιμέλεια : Αποστολίδου Μαγδαληνή (ΠΕ02ΕΑ)

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μελέτη μαθήματος είναι μια διδακτική πρακτική η οποία εμφανίστηκε αρχικά στην Ιαπωνία . Αποσκοπεί στη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης όχι μόνο των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών. Στο πλαίσιο της εφαρμογής της οι συμμετέχοντες συνεργάζονται για το σχεδιασμό ενός ερευνητικού μαθήματος η διδασκαλία και η παρατήρηση του οποίου χρησιμεύει στη συλλογή δεδομένων σχετικά με τη μάθηση των μαθητών . Τα δεδομένα αυτά συμβάλλουν στην ανατροφοδότηση και τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας .

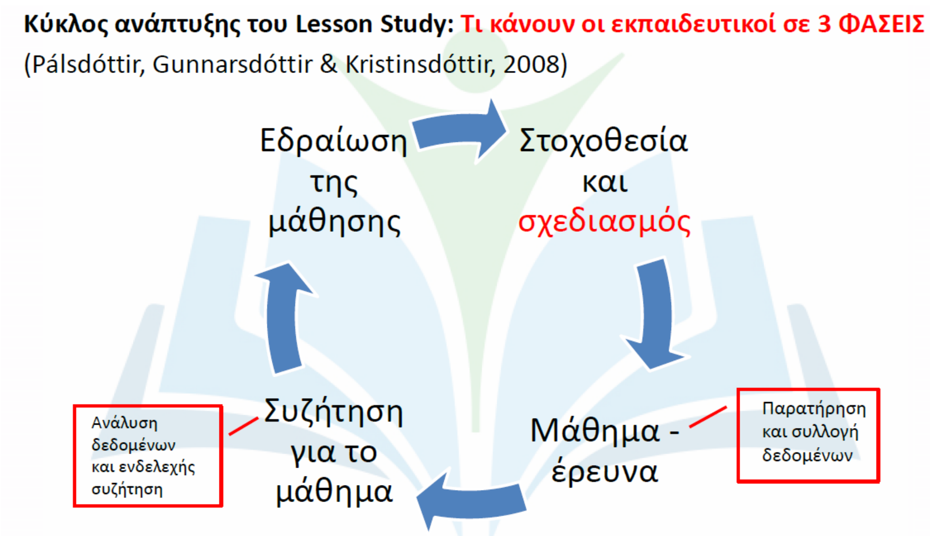
Βασικές Αρχές του Lesson Study ή Μελέτη Μαθήματος

Η βασική ιδέα της μελέτης μαθήματος (Lesson Study) είναι ότι μια ομάδα εκπαιδευτικών, με την υποστήριξη ενός ειδικού αναπτύσσουν ένα σχέδιο διδασκαλίας για ένα μάθημα. Η δομή του μαθήματος, ο ρόλος των εκπαιδευτικών και η μάθηση των μαθητών βρίσκονται στο επίκεντρο. Η διαδικασία μελέτης μαθήματος μπορεί να περιγραφεί ως ένας κύκλος, όπου η ομάδα των εκπαιδευτικών περνά επανειλημμένα από τις φάσεις, συζήτηση, καθορισμός στόχων και σχεδιασμός, δηλαδή έρευνα μαθήματος.

Αρχικά, η ομάδα πρέπει να συζητήσει το στόχο και το περιεχόμενο του μαθήματος. Στη συνέχεια, οι συμμετέχοντες διερευνούν το περιεχόμενο, δηλαδή ποιες έννοιες πρέπει να κατανοηθούν και με ποιον τρόπο να προσεγγιστούν στη διδασκαλία. Οι συμμετέχοντες παίρνουν αποφάσεις για τη διαδικασία που θα ακολουθήσουν , συχνά εμβαθύνοντας τις γνώσεις τους σχετικά με το περιεχόμενο και τις πιθανές διδακτικές προσεγγίσεις. Η ομάδα ερευνά , συνεργάζεται , λαμβάνει αποφάσεις ,σχεδιάζει τη διδασκαλία και βιώνει τα πλεονεκτήματα της συμμετοχής σε μια κοινότητα μάθησης.

Το μάθημα της έρευνας διδάσκεται από έναν από τους συμμετέχοντες και οι άλλοι συμμετέχοντες παρακολουθούν και κρατούν σημειώσεις. Μετά το μάθημα ακολουθεί συζήτηση της ομάδας σχετικά με αυτό και αποφασίζονται αν θα γίνουν αλλαγές ή τροποποιήσεις τόσο στη μέθοδο υλοποίησης όσο και στο φύλλο εργασίας. Μετά την αναθεώρηση - τροποποίηση του σχεδίου μαθήματος , το μάθημα διδάσκεται ξανά σε άλλο τμήμα . Ο κύκλος μπορεί να επαναληφθεί αρκετές φορές (Lewis, C, 2002).

Τα στάδια ανάπτυξης του Lesson Study περιγράφονται συνοπτικά και στην παρακάτω εικόνα. [1]



[1] η εικόνα είναι από τη παρουσίαση της μεθόδου, στο πλαίσιο της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών 2022-2023 για τα Νέα Προγράμματα Σπουδών

Γιατί Lesson Study στα Μαθηματικά ;

Η συνεργασία των εκπαιδευτικών και των μαθητών φαίνεται να αποτελεί κεντρικό ζήτημα σε πολλές από τις ερευνητικές μελέτες. Η ομαδική εργασία, οι κοινότητες μάθησης, τα δίκτυα και ο σχεδιασμός έρευνας , προτείνονται συχνά ως τρόποι για να βοηθηθούν οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίσουν και να ανταποκριθούν στην πολυπλοκότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και να τους υποστηρίξουν στη διαδικασία της δια βίου μάθησή τους. (Jaworski, 2005, 2006, 2007; Krainer, 2003; Wood, 2002; Wood & Berry,2003)

Οι Hiebert, Morris, & Glass περιγράφουν μαθησιακά περιβάλλοντα για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που πρέπει να μάθουν να δημιουργούν , προκειμένου να στηρίξουν τη μάθηση των ίδιων και των άλλων εκπαιδευτικών (Hiebert, Morris, & Glass, 2003). Σε αυτά τα περιβάλλοντα οι φοιτητές εκπαιδευτικοί πρέπει να μάθουν να μαθαίνουν από τη διδασκαλία τους σε συνεργασία με άλλους. Αναφέρουν ότι η μελέτη μαθήματος (Lesson Study)είναι ένα παράδειγμα ενός τέτοιου περιβάλλοντος μάθησης.

Η μελέτη μαθήματος , συχνά αναφέρεται ως παράδειγμα επαγγελματικής ανάπτυξης και στρατηγικής που δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν στη μάθηση με τους συναδέλφους τους (Lewis & Perry, 2009).Είναι επίσης μια στρατηγική που στοχεύει στην επίτευξη και των τεσσάρων αποτελεσμάτων , που σύμφωνα με την Loucks-Horsley και τους συναδέλφους της , χαρακτηρίζουν την αποτελεσματική επαγγελματική ανάπτυξη. Τα αποτελέσματα αυτά είναι: η ενίσχυση των γνώσεων των εκπαιδευτικών, η βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας, η ανάπτυξη ηγετικών ικανοτήτων και η οικοδόμηση επαγγελματικών κοινοτήτων μάθησης (Loucks-Horsley, 2010).

Η Δράση μας

Η δράση μας αποσκοπεί στη βελτιστοποίηση και τον εκσυγχρονισμό της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο , σε συνδυασμό με την ενίσχυση των ψηφιακών δεξιοτήτων των μαθητών/-τριων. Οι διδάσκοντες εφάρμοσαν τη μέθοδο Lesson Study (Μελέτη μαθήματος) σε συγκεκριμένες ενότητες . **Η Μελέτη Μαθήματος , όπως ήδη αναφέρθηκε ,θα μπορούσε να περιγραφεί ως ένας επαναλαμβανόμενος κύκλος στον οποίο η εν λόγω ομάδα εκπαιδευτικών συζητά θέτει στόχους σχεδιάζει και διεξάγει ένα μάθημα έρευνα πάνω στο οποίο γίνεται συζήτηση και μετά την διεξαγωγή του .** Λαμβάνοντας υπόψη το χαρακτήρα του μαθήματος , τις ανάγκες των μαθητών/-τριων και τις προκλήσεις τις κοινωνίας , δημιουργήθηκαν ψηφιακές τάξεις στην eclass και οι μαθητές /-τριες ήρθαν σε επαφή με ψηφιακά και συνεργατικά εργαλεία .

Υλοποίηση Δράσης – Εφαρμογή της μεθόδου Lesson Study

Η υλοποίηση της δράσης ξεκίνησε στην αρχή του σχολικού έτους .

Το πρόβλημα που θέλουμε να διερευνήσουμε, , είναι το πώς οι γνώσεις, οι αντιλήψεις και οι πρακτικές των εκπαιδευτικών (αυτό που εν συντομία αποκαλείται διδακτική στρατηγική) επηρεάζουν την μάθηση

Στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιήσουμε την έρευνα πεδίου , γιατί ως μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ιδιαίτερα στην περίπτωση της εισαγωγής μιας καινοτομίας στην εκπαίδευση (Cohen & Manion, 1997, σ. 270)

Στη συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης μας απασχόλησαν οι απαντήσεις στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Η μέθοδος μελέτη περίπτωσης είναι εφαρμόσιμη
2. Υπάρχει κουλτούρα ερευνητικής ενασχόλησης στο σχολείο
3. Υπάρχει εμπειρία στον σχεδιασμό και υλοποίηση διδακτικών σεναρίων
4. Μπορεί να αναπτυχθεί ομαδοσυνεργατική λογική μεταξύ εκπαιδευτικών

Έχει αναγνωριστεί η κεντρική θέση του εκπαιδευτικού στην εκπαιδευτική διαδικασία, όσο και το γεγονός ότι η αποτυχία αρκετών εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων οφείλεται στο ότι δεν ανταποκρίνονται στις αντιλήψεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί για το τι μπορεί να εφαρμοστεί και να λειτουργήσει μέσα στην τάξη (Calderhead, 1996).

Το **Σεπτέμβριο** δημιουργήθηκε η ομάδα των εκπαιδευτικών η οποία θα συμμετείχε στη Μελέτη Μαθήματος των Μαθηματικών (Lesson Study) .Έγινε διεξοδική ανάλυση της μεθόδου. Συζητήθηκε και αποφασίστηκε ,το πλήθος των μαθημάτων όπως και οι ενότητες στις οποίες θα πραγματοποιόταν τα μαθήματα αυτά ,λαμβάνοντας υπόψιν το ισχύον πρόγραμμα σπουδών.

Οι ενότητες επιλέχθηκαν με κριτήριο τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές ,τόσο στην κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών όσο και στην εφαρμογή τους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων, που θα χρησιμοποιήσουν και στις επόμενες τάξεις .

Επίσης ,αποφασίστηκε ότι κάθε φορά θα συντάσσει και άλλος εκπαιδευτικός το σχέδιο μαθήματος.

Στο διάστημα **Οκτώβριο - Νοέμβριο** έγινε η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου και ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία .

Έγινε συνάντηση της ομάδας με θέματα προς συζήτηση:

1. Διατύπωση δυσκολιών, παρερμηνειών σε έννοιες
2. Σχεδιασμός μαθήματος
3. Φύλλο εργασίας
4. Μέθοδος υλοποίησης

Αποφασίστηκε :

1. Να οριστεί το τμήμα στο οποίο θα γίνει η πρώτη μελέτη μαθήματος παρουσία όλης της ομάδας των εκπαιδευτικών (ετεροπαρατήρηση)
2. Να ακολουθήσει συζήτηση ανατροφοδότησης της ομάδας
3. Να δοθεί ερωτηματολόγιο στους μαθητές του τμήματος που γίνεται το μάθημα έρευνα ,για να μπορέσει να αποκομίσει η ομάδα την ανατροφοδότηση των μαθητών.
4. Να επαναλαμβάνεται το μάθημα σε άλλο τμήμα λαμβάνοντας υπόψη τις διορθώσεις
5. Για την ενίσχυση των ήπιων και ψηφιακών δεξιοτήτων των μαθητών ,να δημιουργηθούν ψηφιακές τάξεις όπου να ανεβαίνει υλικό σχετικό με τα μαθήματα της φυσικής τάξης όπως και extra υλικό για τους μαθητές που ήθελαν διαφορετική προσέγγιση .Καθόλη τη διάρκεια του σχολικού έτους να γίνει εκτεταμένη χρήση του ψηφιακού-δυναμικού εργαλείου geogebra , να παρουσιαστούν οι δυνατότητες του ,πως δηλαδή μπορούν οι μαθητές να το χρησιμοποιούν(και γιατί όχι να το εντάξει σε εφαρμογές που χρησιμοποιούν τακτικά)
6. Για τη διευκόλυνση της ομάδας , να δημιουργηθεί στην αρχή τη σχολικής χρονιάς, ένας κοινόχρηστος φάκελος με συνεργατικά έγγραφα ώστε να μπορούν τα μέλη της ομάδας να τα βλέπουν και να τα τροποποιούν μέχρι να αποφασιστεί το τελικό σχέδιο μαθήματος .

   Στο φάκελο αυτό να βρίσκονται όλα τα σχέδια μαθήματος , φύλλα εργασίας, ερωτηματολόγια, ημερολόγιο και γενικά όλα τα τεκμήρια της δράσης.

Πραγματοποιήθηκε η πρώτη Μελέτη Μαθήματος στο τμήμα Α5 ,στην Άλγεβρα της Α΄ λυκείου , στην ενότητα των απολύτων τιμών. Lesson Study1 . **Η δύναμη του τμήματος** ήταν 23 μαθητές .

Έγινε συζήτηση και αποτίμηση της πρώτης εφαρμογής της μεθόδου . Διαπιστώθηκε ότι δεν υπήρξαν προβλήματα στην εφαρμογή και υπήρχε θετικός αντίκτυπος στους μαθητές όπως προκύπτει από το ερωτηματολόγιο.

Όλα τα παιδιά έχουν υπολογιστή στο σπίτι τους. Όλοι οι μαθητές/τριες έδειξαν ενδιαφέρον για τον νέο τρόπο προσέγγισης της γνώσης και κανένα δεν έδειξε σημεία κούρασης ή να βαριέται. Η διδακτική διαδικασία εξελίχθηκε ευχάριστα, και ο χρόνος πέρασε χωρίς να το καταλάβουν. Η επίλυση παρόμοιων προβλημάτων που αναρτήθηκαν στην eclass θα δώσει την προσδοκώμενη εμπέδωση και εδώ αναφύεται το πρόβλημα της χρήσης των νέων τεχνολογιών .

Διαπιστώθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν επαρκείς γνώσεις στην χρήση των νεων τεχνολογιών . Η γνώση του εξειδικευμένου λογισμικού geogebra που ήταν και προαπαιτούμενο για την εφαρμογή της μεθόδου ήταν πολύ καλή μεταξυ των εκπαιδευτικών. Το πρόβλημα που διαπιστώθηκε ήταν ότι οι μαθητές/τριες δεν είχαν ανάλογη εμπειρία . Αποφασίστηκε να δοθούν οδηγίες χρήσης. Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν τις νέες τεχνολογίες , τις αγκαλιάζουν στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά οι γνώσεις τους πάνω στην χρήση εξειδικευμένων εργαλείων είναι περιορισμένη.

Έγινε από την ομάδα μια τροποποίηση - προσθήκη στο φύλλο εργασίας (έμμεση πιθανή αλλαγή μεθόδου υλοποίησης) και επαναλήφθηκε το μάθημα στο τμήμα Α1, με δύναμη 24 μαθητές , λαμβάνοντας πάλι υπόψιν τα χαρακτηριστικά του τμήματος .

Στο διάστημα **Νοέμβριο – Δεκέμβριο** ,αφού είχε προηγηθεί συνάντηση της ομάδας η οποία συζήτησε και σχεδίασε το 2ο μάθημα , έγινε η δεύτερη Μελέτη Μαθήματος στο τμήμα Γοπλ3 , στα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου, στην ενότητα του ορισμού της παραγωγού Lesson Study2 . **Η δύναμη του τμήματος** ήταν 21 μαθητές .

Έχοντας την εμπειρία από την πρώτη εφαρμογή διαπιστώθηκε στην ομάδα ότι όλα βαίνουν καλώς. Έγιναν μικροδιορθώσεις και επαναλήφθηκε το μάθημα στο τμήμα Γοπλ2, το οποίο είχε 22 μαθητές . Παράλληλα , έγινε και μια τροποποίηση του φύλλου εργασίας , ώστε αυτό να αντιστοιχεί σε 2 διδακτικές ώρες και το μάθημα επαναλήφθηκε και στο τμήμα Γθετ2 , με 16 μαθητές .

Όλα τα παιδιά έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για τη διδασκαλία μέσω λογισμικού στον διαδραστικό πίνακα . Οι μαθητές/τριες με την μέθοδο μελέτη περίπτωσης έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά . Παρότι δεν υπήρχε εξοικείωση από τους μαθητές/τριες με το λογισμικό Geogebra έδειξαν εξαιρετικό ενδιαφέρον για να μάθουν να το χρησιμο-ποιούν.

Στην ανατροφοδότηση της δεύτερης εφαρμογής της μεθόδου , πέραν των άλλων διαπιστώθηκε ότι μεταξύ των εκπαιδευτικών δημιουργήθηκε η δυναμική της ομάδος παρότι δεν υπήρχε από το παρελθόν τέτοια εμπειρία

Οι μετέχοντες στην έρευνα συμφώνησαν ότι τα υπολογιστικά μέσα συνεισφέρουν στο να αλλάξει η διδασκαλία από το παραδοσιακό μοντέλο σε σύγχρονα μοντέλα, μετασχηματίζουν το παιδαγωγικό περιβάλλον της τάξης και βοηθούν στην πληρέστερη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές/τριες

Οι εκπαιδευτικοί κατά την διάρκεια της εφαρμογής της μεθόδου έπρεπε να συμβουλέψουν, να συνεργαστούν, να καθοδηγήσουν, να εστιάσουν. Πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί επρεπε να ανατρέψου την πορεία συλλογισμού μιας ομάδας , προσπαθώντας να τους οδηγήσουν στο σωστό συμπέρασμα.

Γίναμε όλοι μια ομάδα που μαθαίναμε. Η καλύτερη εκμετάλλευση του διδακτικού χρόνου η πληθώρα διαθέσιμων πηγών δίνουν την δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επεξηγεί καλύτερα, χρησιμοποιώντας και παραδείγματα, από όλες τις διδακτικές ενότητες, να πετυχαίνει μια βαθύτερη κατανόηση του διδακτικού αντικειμένου και να τονίζει όλες τις πτυχές των θεμάτων που απορρέουν κατά την προσπάθεια επιτυχίας του διδακτικού στόχου.

Στο διάστημα **Ιανουάριο - Φεβρουάριο** έγιναν συναντήσεις της ομάδας και συζητήθηκαν θέματα σχετικά με τη περαιτέρω βελτίωση της μεθόδου, ώστε να έχει μεγαλύτερη επιτυχία το εγχείρημα .

Τον **Μάρτιο** για την τρίτη εφαρμογή της μεθόδου αποφασίστηκε ,να ληφθεί υπόψη το θεωρητικό πλαίσιο των ΄΄ τριών σημείων΄΄ (Three Points Framework) (Yang&Ricks, 2012)

Έγινε δηλαδή προσπάθεια ώστε στον σχεδιασμό του μαθήματος να γίνει αναφορά στα σημεία κλειδιά ,τα δύσκολα σημεία και τα κρίσιμα σημεία του μαθήματος και πάνω σε αυτά να σχεδιαστεί το φύλλο εργασίας. Επίσης , να δοθεί το ερωτηματολόγιο και στα τμήματα της Β΄ προσανατολισμού που δεν συμμετείχαν στο μάθημα έρευνας .

Πραγματοποιήθηκε η τρίτη μελέτη μαθήματος στο τμήμα Βθετ4 , στα μαθηματικά προσανατολισμού Β΄ Λυκείου, στην ενότητα της εφαπτομένη του κύκλου. Lesson Study3. **Η δύναμη του τμήματος ήταν 23 μαθητές.**

Μετά τη συνάντηση της ομάδας κρίθηκε απαραίτητο να γίνουν κάποιες αλλαγές στο φύλλο εργασίας και το μάθημα επαναλήφθηκε στο τμήμα Βθετ1 , με δύναμη 23 μαθητές.

Το δεύτερο δεκαπενθήμερο του Μαρτίου, το τμήμα Βθετ1, χωρίστηκε σε ομάδες και σε κάθε ομάδα ανατέθηκε μία διαφορετική εργασία την οποία δούλεψαν σε ψηφιακό περιβάλλον και την παρουσίασαν στο τέλος της σχολικής χρόνιας. Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας παρουσιάστηκε και το online σχεδιαστικό- ομαδοσυνεργατικό εργαλείο https://excalidraw.com/ , δημιουργήθηκαν κοινόχρηστοι φάκελοι στο google drive , ένας για κάθε ομάδα και φυσικά δημιουργήθηκε αντίστοιχη εργασία στην eclass.

Οι μέθοδοι συλλογής πληροφοριών ήταν η παρατήρηση οι συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια . Κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς , με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών (μαθηματικών που το υλοποίησαν και την καθοδήγηση των επιμορφωτών) που ήταν παρόντες και συμμετείχαν ενεργά στη διδασκαλία, καταγράφαμε τις αντιδράσεις των μαθητών, τα συναισθήματά τους και τους παροτρύναμε να μας πούνε τη γνώμη για τον τρόπο με τον οποίο γινόταν η διδακτική προσέγγιση . Μετά το πέρας του ημερήσιου προγράμματος γίνονταν συζήτηση μεταξυ των εκπαιδευτικών για την εφαρμογή της μεθόδου αλλα για την εισαγωγή και χρησιμότητα των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση και ιδιαίτερα για την αντιμετώπιση των μαθησιακών δυσκολιών, καθώς και τις προτάσεις τους για την αξιοποίηση και την καλύτερη χρήση αυτού του νέου εκπαιδευτικού εργαλείου.

Οι εκπαιδευτικοί μέσω της ανεστραμμένης τάξης και του eclass έλεγχαν την εμπλοκή των μαθητών στην χρήση των νέων τεχνολογιών

Επίσης οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με εργαλεία, όπως το QR Code και την εφαρμογή του αφού δόθηκε ερωτηματολόγιο με QR code ή με link στο αντίστοιχο μάθημα της eclass. Επίσης δόθηκε σε διάφορα τμήματα και των τριών τάξεων εργασία μέσω QR Code , δηλαδή δεν δόθηκε φυλλάδιο άλλα το QR Code που τους παρέπεμπε σε έγγραφο του Google Form.

Αποτίμηση δράσης

Αποτελέσματα δράσης

Χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο lesson study για να κάνουμε μια διαφορετική διδακτική προσέγγιση στην διδασκαλία διδακτικών ενοτήτων των Μαθηματικών που παρουσιάζουν δυσκολίες . Η διδασκαλία ανέδειξε θετικό συσχετισμό του κινήτρου των παιδιών με τη διδασκαλία μέσω αυτής της μεθόδου , καθώς και σημαντική βελτίωση της επίδοσης των μαθητών/τριών που επωφελήθηκαν από τη εφαρμογή . Εντύπωση έκανε το γεγονός πως παιδιά που είχαν χαρακτηριστεί υπερ-κινητικά και πως η προσοχή τους διασπάται συχνά, έδειξαν συγκέντρωση σ' αυτό που έκαναν και για αρκετή ώρα .Η στάση τους είναι ένα μεγάλο βήμα προς την αντιμετώπιση των δυσκολιών τους.

Διαπιστώθηκε πως δίνονται ερεθίσματα, προκαλείται το ενδιαφέρον, η διδασκαλία γίνεται πιο ευέλικτη και δεν υπάρχει η πλήξη του προβλέψιμου. Οι μαθητές δομούν τις δικές τους ιδέες και παράλληλα επιτυγχάνεται εκμάθηση και ενσωμάτωση μεθόδων κατάκτησης της γνώσης και όχι επανάληψη και ξερή απομνημόνευση της

Οι μαθητές/τριες με την καθοδήγηση και τη βοήθεια του εκπαιδευτικού έκαναν υποθέσεις, υπέβάλλαν ερωτήματα, , ανέλυσαν έννοιες . Η έρευνά μας έδειξε πως η χρήση της μεθόδου lesson study στην τάξη πέτυχε:

• Πληρέστερη και ευρύτερη κατανόηση του διδακτικού αντικειμένου

• Πληρέστερη και ουσιαστικότερη πληροφόρηση • Πιο ουσιαστική επικοινωνία και ανταλλαγή ιδεών και πληροφοριών

• Ανάπτυξη του διαλόγου και της συνεργασίας. Άρα η χρήση των νέων τεχνολογιών μπορεί να βελτιώσει την ικανότητα μάθησης και να βοηθήσει και τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες.

Παρατηρήσαμε ότι η διδακτική προσέγγιση κάποιων ενοτήτων με τη βοήθεια της eclass παρέχει χρήση πηγών και πληροφοριών, τις οποίες διαχειρίζεται ο εκπαιδευτικός , ενώ ο τρόπος διάταξης της τάξης, η εκπαιδευτική λειτουργία της και ο διδακτικός ρόλος του εκαπαιδευτικού συμβάλλουν στη σωστή διαχείριση της μάθησης και στην ανάπτυξη της γλωσσικήςεπικοινωνιακής μάθησης.

Οι μαθητές/τριες κατανέμονταν σε μικρές ομάδες, παρατηρούσαν, επεξεργάζονταν, σχολίαζαν τις πληροφορίες, κατέγραφαν τα δεδομένα, παράγουν έργο και έτσι ανέπτυσσαν την κριτική άσκηση της σκέψης, την αιτιολόγηση και την δημιουργικότητα. Μέσα από τις ερωτήσεις των φύλλων εργασίας , προκλήθηκε ο διάλογος και η συζήτηση και γίνονταν πιο εύκολα αντιληπτές οι έννοιες που διδάσκονται.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το πληθος των μαθητών/τριων είναι ένα θέμα . Σίγουρα η αποτελεσματικότητα της μεθόδου αυξάνει όσο μειώνεται ο αριθμός των μαθητων/τριων ανα τμήμα

Στην ανατροφοδότηση διαπιστώθηκε ο ενθουσιασμός με τον οποίο τα παιδιά αντιμετώπιζαν την αλληλεπίδραση με την νέα διδακτική προσέγγιση, η αυξημένη προσοχή και η συμμετοχή των μαθητών/τριων, καθώς και η επίμονη προσπάθεια των μαθητών/τριων να απαντήσουν σωστά τις ασκήσεις. Παρουσίαζαν δε, αυξημένο ενδιαφέρον για το μάθημα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων καλλιεργήθηκε η ευγενής άμιλλα, αλλά και η συντροφικότητα μεταξύ των παιδιών που ήταν στην ιδια ομάδα. Οι μαθητές προχώρησαν με το δικό του ρυθμό. Αύξησαν την προσπάθεια που καταβάλλουν αλλά και τη συμμετοχή τους. Μεταξύ τους αναπτύχθηκε ο συναγωνισμός και συζητούσαν που έχει φτάσει ο καθένας. Όλοι οι μαθητές δήλωσαν πως είναι ευχαριστημένοι και μεγάλο ρόλο σ' αυτό έπαιξε το ότι αισθάνθηκαν να αποδεσμεύονται-σχετικά βέβαια- από τον άμεσο έλεγχο των ενηλίκων. Έδειξαν θετική προδιάθεση προς την εργασία με τον υπολογιστή στο

Έτσι κατέστη δυνατόν να εργάζονται, μπροστά στον υπολογιστή, με τρόπο παραγωγικό αλλά συγχρόνως και ευχάριστο μέσω των δραστηριοτήτων της ανεστραμμένης τάξης . Αισθάνονται άνετα όταν χρησιμοποιούν την συγκεκριμένη μέθοδο, νιώθουν λιγότερο φόβο και ανησυχία, γιατί έχουν τη δυνατότητα να κάνουν λάθη χωρίς να τα μαθαίνει όλη η τάξη ακόμα κι όταν τα σχολιάζει ο εκπαιδευτικός.

Όλες οι δραστηριότητες προκαλούσαν ευχαρίστηση στα παιδιά και δεν προκαλούσαν την ανία γιατί ήταν διαφορετικές και ανταποκρινόταν στο επίπεδο των δυνατοτήτων τους. Άρα πρέπει ο εκπαιδευτικός να φροντίζει ώστε οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας να έχουν πολυμορφία και να ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στις ανάγκες του κάθε μαθητή. Ακόμα το παιδί να μπορεί να επιλέγει, για νιώθει ελεύθερο και να αντλεί ευχαρίστηση από τις δραστηριότητες που του προτείνονται. Τέλος και ο χώρος πρέπει να είναι κατάλληλος και να υπάρχει σωστή διάταξη του εξοπλισμού και των υπόλοιπων αντικειμένων της τάξης.

Οι πιο καλοί μαθητές όχι μόνο αφήνουν τους "αδύνατους" να προσπαθήσουν αλλά και χωρίς να σχολιάζουν να τους βοηθούν μέσα σε κλίμα αλληλοκατανόησης και αλληλεγγύης.. Ακόμα το ακατάλληλο εκπαιδευτικό λογισμικό αποτελεί εμπόδιο για τη μάθηση. Διαπιστώσαμε ότι μερικές φορές η χρήση λογισμικού μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της φαντασίας και της δημιουργικότητας του μαθητή/τρια , γιατί όλα τα προγράμματα έχουν μια συγκεκριμένη τυπολογία και τεχνοτροπία. Πολλές φορές τα παιδιά «πέφτουν με τα μούτρα» στον υπολογιστή και ξεχνιούνται και απομονώνονται. Οι εργασίες στο σπίτι δεν έχουν αυτόν το σκοπό

Για να είναι επιτυχημένο ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών ως βασικά κριτήρια αναφέρονται μεταξύ άλλων (Coolahan, 2002):

1.Να ενσωματώνει παραμέτρους που αφορούν μια συστημική προσέγγιση της διδασκαλίας, εντός και εκτός σχολικού πλαισίου

2.Οι εκπαιδευτικοί να έχουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της ατζέντας αλλά και να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία έχοντας τη δυνατότητα να ελέγχουν υποθέσεις με πειραματική εφαρμογή

3.Να συνεργάζονται με άλλους εκπαιδευτικούς

4.Να αξιοποιούν τεχνικές και μέθοδοι που ενισχύουν την αλληλεπίδραση και συνεργασία μεταξύ των συμμετεχόντων .

5.Να λαμβάνει χώρα με γνώμονα τη βελτίωση της ποιότητας του σχολείου ευνοώντας τη συμμετοχή και συνεργασία εκπαιδευτικών από ομάδες σχολείων με στόχο την επαγγελματική μάθηση και την εμπλοκή σε δραστηριότητες που προάγουν την επαγγελματική εξέλιξη (' bottom-across' approach)

Τα πρώτα 4 επιτεύχθηκαν σε πολύ καλό βαθμό το τελευταίο θα ήταν καλό να γίνει τη δεύτερη χρονιά εφαρμογή της μεθόδου .

Η εφαρμογή της μεθόδου Lesson Study είχε ως αποτέλεσμα ,όχι μόνο την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών αλλά και την αίσθηση του ανήκειν σε μία κοινότητα μάθησης ,που συνεισέφερε στη βελτιστοποίηση των πρακτικών της διδασκαλίας τους και την πρόβλεψη πιθανών αποριών των μαθητών τους , οπότε συνεισέφερε και στη βελτίωση της μάθησης των μαθητών.

Με την παρούσα δράση ενισχύθηκε, επίσης , ο ψηφιακός γραμματισμός των μαθητών και δημιουργήθηκε πρόσφορο έδαφος για τη δημιουργία ομάδων συνεργασίας μεταξύ των μαθητών.

Εν κατακλείδι η τάξη κινητοποιήθηκε καθώς υπήρξαν πολλες στιγμές διάδρασης. Υπήρχε κίνητρο απόκτησης της γνώσης. Στην παραδοσιακή τάξη η αφόρμηση γίνεται σε μεγάλο βαθμό τεχνητά. Κατά τη διδασκαλία με τη μέθοδο case study έχουμε την ευκαιρία να προσεγγίσουμε τη διαδικασία σκέψης των μαθητών μας και να τους διευκολύνουμε στην αναζήτηση γνώσης και εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα ενδεχόμενα λάθη των μαθητών μας είναι αξιοποιήσιμα καθώς μπορούν να διευρύνουν την έρευνά μας. Χρειάζεται περισσότερη και πιο πλατειά έρευνα στα θέματα αυτά. Η έρευνα πρέπει να συμπεριλάβει περισσότερα τμήματα, σε όσο το μεγαλύτερο αριθμό μαθητών/τριων γίνεται, για να βγουν και ποιο αντιπροσωπευτικά συμπεράσματα

Υλικό που παρήχθη ή αξιοποιήθηκε

Παρήχθησαν και αξιοποιήθηκαν 3 μελέτες μαθήματος , που περιλαμβάνουν τα σχέδια μαθήματος , τα φύλλα εργασίας τους , μικροπειράματα σε περιβάλλον Geogebra και τα συμπεράσματα που αποκομισθήκαν από την ανατροφοδότηση τόσο της ομάδας των εκπαιδευτικών , όσο και των μαθητών.

Το υλικό αυτό βρίσκεται στους παρακάτω κοινόχρηστους φακέλους[2] :

Lesson Study 1 Απόλυτη τιμή

Lesson Study 2 Ορισμός της Παραγώγου

Lesson Study 3 Εφαπτομένη Κύκλου (Ο,ρ)

Επίσης έγιναν εργασίες με στόχο τόσο τη διαθεματική προσέγγιση των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου (Άλγεβρα - Γεωμετρία - Μαθηματικά προσανατολισμού) , όσο και τη χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Β θετ1 Εργασίες

Δυσκολίες που παρουσιάστηκαν

Παρά τα θετικά αποτελέσματα από την αξιοποίηση της μελέτης μαθήματος στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που αναφέρονται στο παρόν σχέδιο δράσης, υπήρχαν και κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι θα πρέπει να αναφερθούν .

Το δείγμα της έρευνας ήταν σχετικά μικρό καθώς υπήρχε από μία μικρή , ευτυχώς, μερίδα μαθητών άρνηση να γραφτούν στην eclass καθώς και να συμπληρώσουν τα ερωτηματολόγια της ανατροφοδότησης . Περισσότερη απροθυμία στη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου παρουσιάστηκε

[2] Τα σχέδια μαθήματος και τα αντίστοιχα Φύλλα Εργασίας βρίσκονται και στο Παράρτημα

στα τμήματα που δεν συμμετείχαν στο Lesson study. Η χρήση μεγαλύτερου δείγματος θα ενίσχυε την αξιοπιστία της.

Υπήρχαν χρονικοί περιορισμοί σχετικά με την εφαρμογή της έρευνας που δεν επέτρεψαν τη μεγαλύτερη διάρκεια της , καθώς η συγκεκριμένη μέθοδος Lesson Study αποσκοπεί στην μελέτη ενός μαθήματος ,την διδασκαλία του, την ετεροπαρατήρηση , τον επανασχεδιασμό και την διδασκαλία του σε άλλο τμήμα από άλλον διδάσκοντα , κάτι που δεν είναι πάντοτε εφικτό , καθώς η ύλη των Μαθηματικών είναι μεγάλη και δεν προβλέπονται πολλές καθυστερήσεις για να βγει . Επίσης , σε ένα μεγάλο σχολείο με πολλά τμήματα είναι δύσκολο να συμβαδίζουν όλοι οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν το ίδιο αντικείμενο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος ,όπως και να δοθούν τα ερωτηματολόγια που αφορούν τις ενότητες που έγιναν οι μελ έτες , στα τμήματα των εκπαιδευτικών που δεν ήταν στην κοινότητα μάθησης του Lesson Study.

Πρόταση για περαιτέρω έρευνα

Η Μελέτη Μαθήματος είναι μία διδακτική πρακτική στο πλαίσιο της οποίας, οι συμμετέχοντες συνεργάζονται για το σχεδιασμό ενός ερευνητικού μαθήματος ,τη διδασκαλία την παρατήρηση και τη συλλογή δεδομένων σχετικών με τη μάθηση των μαθητών. Η χρήση των δεδομένων αυτών για την ανατροφοδότηση και τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας συμβάλλει αποφασιστικά στη βελτίωση των εκπαιδευτικών (Stepanek, Appel,Leong,Turner,Mangan&Mitcell, 2007)

Θα μπορούσε λοιπόν να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας , η διεξαγωγή συγκριτικών μελετών μεταξύ διαφορετικών μαθημάτων αναφορικά με τη μελέτη μαθήματος στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού συστήματος. Προτείνεται ,επίσης , η διεξαγωγή εμπειρικής έρευνας προκειμένου να διερευνηθούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μελέτης μαθήματος αναφορικά με την κινητοποίηση των μαθητών και τη βελτίωση των επιδόσεων τους, τις στάσεις και τις πεποιθήσεις μαθητών και εκπαιδευτικών, τα πλεονεκτήματα και τις δυσκολίες ,καθώς και τις προϋποθέσεις αποτελεσματικής εφαρμογής της.

Με το παρόν σχέδιο , έγινε η αρχή για τη δημιουργία μιας κοινότητας μάθησης για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που αποσκοπεί στη βελτιστοποίηση των διδακτικών τους πρακτικών και κατ επέκταση στον εκσυγχρονισμό της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών. Επομένως , καλό είναι να συνεχιστεί αυτή η κοινότητα μάθησης, καθώς υπάρχουν αρκετές επιπλέον μαθηματικές έννοιες που δεν ήταν δυνατόν να μελετηθούν κατά τη διάρκεια μιας μόν ο σχολικής χρονιάς.

Επίλογος

Η Μελέτη Μαθήματος συνδυάζει τη θεωρητική και πρακτική μάθηση . Η βελτίωση των επαγγελματικών γνώσεων και δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών τους δίνει τη δυνατότητα να διακριθούν ως εκπαιδευτικοί παρέχοντας υψηλής ποιότητας διδασκαλίας στους μαθητές

, δίνοντας στους τελευταίους ευκαιρίες για ουσιαστική κατάκτηση της γνώσης.(Nishimura,2016 . Wessels,2018).Επίσης η μελέτη μαθήματος οξύνει την κριτική σκέψη των εκπαιδευτικών μέσω της ομαδικής και συνεργατικής διδασκαλίας η οποία εφαρμόζεται στο πλαίσιο της υλοποίησης της ,ενεργοποιεί διάφορες ικανότητες και δεξιότητες και βελτιώνει τη μάθηση τους . (Darling-Hammod & Richardson, 2009) (DarlingHammod & Richardson)

Η μελέτη μαθήματος αναφέρεται και ως παράδειγμα παιδαγωγικής για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία ως διαδικασία δια βίου μάθησης. (Hammerness & Darling-Hammond, 2005)

Οπότε η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου στο παρόν σχέδιο δράσης , αποτέλεσε έναν πολύτιμο εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς να συνεργαστούν, να βελτιώσουν τη διδακτική τους πρακτική και να ενισχύσουν , στην προκειμένη περίπτωση , τη μάθηση των μαθητών τους στο μάθημα των μαθηματικών στο Λύκειο.

Βιβλιογραφία

Coolahan. (2002). Teacher Education and the Teaching Career in an Era of Lifelong Learning.

Darling-Hammod & Richardson. (2009). *Professional learning in the learning profession:A status report on teacher development in the United States and abroad.*

Hammerness & Darling-Hammond. (2005). *The design of teacher education programs.*

Hiebert, Morris, & Glass. (2003). Learning to learn to teach: An ''experiment '' model for teaching and teacher preperation in mathematics. *Journal of mathematics teacher education*.

Jaworski, 2005, 2006, 2007; Krainer, 2003; Wood, 2002; Wood & Berry,2003. (n.d.). *Theory and practice in mathematics teacher education.* G Pálsdóttir .

Lewis & Perry. (2009). The SAGE Handbook of Educational Action Research.

Lewis, C. (2002). Lesson study: A handbook of teαcher-led instructinal change . *Psychology, Vol.4 No.12, December 31, 2013*.

Loucks-Horsley. (2010). Designing Professional Development for Teachers of Science and Mathematics.

Stepanek, Appel,Leong,Turner,Mangan&Mitcell. (2007). Leading Lesson Study.

Yang&Ricks. (2012). *Three Points Framework.*

Παράρτημα

Lesson Study 1 _Σχέδιο μαθήματος και Φύλλο εργασίας

Δομή & Περιεχόμενο Διδακτικού Σεναρίου

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Συντάκτης: Κουτσφετσούλη Ευανθία (ΠΕ03)

Συμμετέχοντες Μελέτης Μαθήματος: Βασιλειάδου Ευαγγελία (ΠΕ03), Μουρατίδου Μαρία(ΠΕ03), Μπάμπουρας Γεώργιος(ΠΕ03), Τσίτσος Γεώργιος **(ΠΕ03)**

Επιμορφωτές: Εμμανουηλίδης Αριστείδης (ΠΕ04.01 ,Διευθυντής)
Τσαμπούκα Πετρούλα (ΣΕΕ ΠΕ03 Δυτικής Θεσ/κης)

Θεματική του διδακτικού σεναρίου: Απόλυτη Τιμή

Βαθμίδα – Τάξη: Α΄Λυκείου **Διδακτικές ώρες:** 1

Ενότητα του ΠΣ: Άλγεβρα, Αριθμοί

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):

- Να ορίζουν γεωμετρικά την απόλυτη τιμή.
- Να ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή και να τη συνδέουν με την απόσταση του αριθμού απο το 0
- Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις συνέπειες του ορισμού για την επίλυση προβλημάτων και να μπορούν να τις ερμηνεύουν γεωμετρικά

Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών/τριών (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές):

- Την έννοια του άξονα των πραγματικών αριθμών
- Την έννοια της τετμημένης σημείου
- Την έννοια των αντίθετων αριθμών
- Τον ορισμό του κύκλου

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

Βασικές δυσκολίες των μαθητών ως προς τη μαθηματική έννοια-διαδικασία / διεργασία

Η έννοια της απόλυτης τιμής είναι μία πολύ σημαντική έννοια για τα Μαθηματικά. Η απόλυτη τιμή εισάγει τους μαθητές στην έννοια της απόστασης ενός πραγματικού αριθμού από το 0. Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στο να κατανοήσουν τόσο τη γεωμετρική ερμηνεία της και να συνδέσουν τον γεωμετρικό με τον αλγεβρικό ορισμό.

Μια ακόμη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι να αντιληφθούν ότι η παρουσία ή όχι προσήμου μπροστά από μια μεταβλητή δεν καθορίζει υποχρεωτικά και το πρόσημό της.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα αντιληπτή από τους μαθητές.

3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΟΡΕΙΑΣ

Στους μαθητές μοιράζεται ένα φύλλο εργασίας.Εργάζονται σε ομάδες των δυο ή ατομικά και καθοδηγούνται απο τον διδάσκοντα και από το φύλλο εργασίας. Καλούνται να πειραματιστούν, να παρατηρήσουν, να εξερευνήσουν συγκεκριμένα ερωτήματα στα οποία γίνεται προσπάθεια οπτικοποίησης των εννοιών για να βοηθηθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Στην πρώτη και δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές κατασκευάζουν την πραγματική ευθεία και τρείς ομόκεντρους κύκλους. Έπειτα εντοπίζουν τα σημεία τομής τους με την πραγματική ευθεία και συμπληρώνουν τον πίνακα. Παράλληλα ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει σ'ένα αρχείο geogebra τη δραστηρότητα αυτή. Στόχος της δραστηριότητας είναι να αποκτήσουν οι μαθητές μια γεωμετρική εποπτεία για να οδηγηθούν μετά, με τη βοήθεια του διδάσκοντος, στο γεωμετρικό ορισμό της απόλυτης τιμής στην Τρίτη δραστηριότητα.

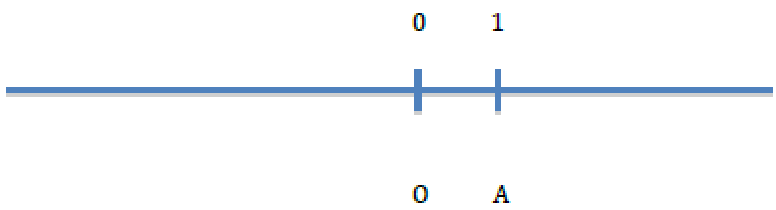
Η επόμενη δραστηριότητα έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τη δυσκολία που έχουν να αντιληφθούν ότι η παρουσία ή όχι προσήμου μπροστά από μια μεταβλητή δεν καθορίζει υποχρεωτικά και το πρόσημό της. Ειδικά στην περίπτωση στην οποία δεν υπάρχει πληροφορία για το πρόσημο της μεταβλητής αυτής. Η οπτικοποίηση που προσφέρει βοηθάει πολύ προς αυτή την κατεύθυνση αφού φαίνεται άμεσα η συμεταβολή των δυο μεταβλητών.

Στην έκτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα την απόλυτη τιμή

Η τελευταία δραστηριότητα παρουσιάζει τρείς βασικές συνέπειες που προκύπτουν απο τον ορισμό της απόλυτης τιμής και οι μαθητές καλούνται να τις ερμηνεύσουν με τη βοήθεια του γεωμετρικού ή του αλγεβρικού ορισμου της. Στην περίπτωση της ερμηνείας των σχέσεων με τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής με την προτροπή του διδάσκοντα οι μαθητές θα διακρίνουν περιπτώσεις για το πρόσημο του α. Με τον τρόπο αυτό θα γίνει εισαγωγή σ'ένα σημαντικό μεθοδολογικό εργαλείο απόδειξης, τη διερεύνηση και τη διάκριση περιπτώσεων

4. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1) Στον παρακάτω άξονα των πραγματικών αριθμών, θεωρείστε ότι στο σημείο O αντιστοιχεί το 0. Θεωρούμε σημείο A ώστε το μήκος OA να είναι ίσο με 1 μονάδα μήκους και στο A να αντιστοιχεί ο αριθμός 1. Τοποθετείστε τώρα τους αριθμούς 2, 3, -1, -2, -3, και ονομάστε τα σημεία Β,Γ,Δ,Ε,Ζ



2) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών να κατασκευάσετε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο την αρχή O και ρ=1, ρ=2, ρ=3 και να βρείτε τα σημεία τομής των κύκλων με την πραγματική ευθεία. Έπειτα, να συμπληρωθεί ο πινακας.

Σημείο Τομής των κύκλων με ευθεία	Τετμημένη των σημείων	Απόσταση σημείων από O
A		
B		
Γ		
Δ		

Ε		
Ζ		

3) Να συμπληρώσετε τα κενά κατάλληλα ώστε να προκύψει ο ορισμός της απόλυτης τιμής.
Ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός αριθμού α και συμβολίζουμε με $|\alpha|$ την ………………του σημείου με τετμημένη ……. απο το σημείο ……

4) Με τη βοήθεια του ορισμού της απόλυτης τιμής να συμπληρωθούν οι ισότητες

$|4| =$

$|-4| =$

$|0{,}8| =$

$|-0{,}8| =$

$|0| =$

5) Με –α συμβολίζουμε τον αντίθετο του αριθμού α. Αλλάξτε θέση στο δρομέα α και παρατηρείστε ποιος είναι ο αντίθετος του. Έπειτα απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i. Ο αριθμός -α είναι πάντα αρνητικός Σ Λ
ii. Αν α<0 τότε -α>0 Σ Λ
iii. Αν α>0 τότε -α<0 Σ Λ
iv. Αν -α<0 τότε α>0 Σ Λ

6) Συμπληρώστε τα κενά

$$|\alpha| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

7) Αν α ένας θετικός αριθμός σε ποια θέση της πραγματικής ευθείας σχετικά με το 0 μπορεί να τοποθετηθεί; Στη συνέχεια τοποθετείστε στη σωστή θέση τους αριθμούς -α και $|\alpha|$. Με τι ισούται η απόλυτη τιμή του αριθμού α; Επαναλάβετε την διαδικασία για α<0 και για α=0.Να εξηγήσετε με βάση τα παραπάνω γιατί ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

i) $|\alpha| \geq 0$ ii) $|\alpha|^2 = \alpha^2$ iii) $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$

8) Να γίνουν οιασκήσεις 1,2,3 του σχολικού βιβλίου

5. ΠΗΓΕΣ/ΠΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

φύλλο εργασία, γεωμετρικά όργανα, λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (geogebra), βιντεοπροβολέας, υπολογιστές, σύνδεση στο ίντερνετ.

Αρχείο λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (ggb): https://www.geogebra.org/material/copy/id/cqdx8xbg

Στην ανατροφοδότηση αποφασίστηκε να προστεθεί σ το φύλλο εργασίας η δραστηριότητα : https://www.geogebra.org/classic/a9BMuwVu

Lesson Study 2 _ Σχέδιο Μαθήματος και Φύλλο Εργασίας

Σχέδιο Μαθήματος Γ οπλ.

Συντάκτης: Μουρατίδου Μαρία (ΠΕ03)

Συμμετέχοντες Μελέτης Μαθήματος: Βασιλειάδου Ευαγγελία(ΠΕ03), Κουτσφετσούλη Ευανθία(ΠΕ03), Μπάμπουρας Γεώργιος(ΠΕ03), Τσίτσος Γεώργιος(ΠΕ03)

Επιμορφωτές: Εμμανουηλίδης Αριστείδης (ΠΕ04.01,Διευθυντής)
Τσαμπούκα Πετρούλα (ΣΕΕ ΠΕ03 Δυτικής Θεσσαλονίκης)

Μάθημα : Μαθηματικά προσανατολισμού Γ Λυκείου
Ενότητα : Ορισμός της παραγώγου συνάρτησης σ΄ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της .
Διάρκεια : 1 διδακτική ώρα

Διδακτικοί στόχοι :

- Οι μαθητές να αναγνωρίζουν την παράγωγο μιας συνάρτησης , ως το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης .
- Οι μαθητές να αναγνωρίζουν το πρόσημο της παραγώγου από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης .
- Οι μαθητές να υπολογίζουν τις αλγεβρικές τιμές της παράγωγου μιας συνάρτησης με τη βοήθεια του ορισμού .

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας
- Εξίσωση ευθείας
- Η έννοια του ορίου και ο υπολογισμός του

Σύντομη περιγραφή μαθήματος

➢ Ανάκληση των γνωστικών προαπαιτούμενων και ενημέρωση για την ενότητα που θα διδαχθούν.

➢ Δραστηριότητα 1η : Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου .
Στη Δραστηριότητα αυτή ανοίγουμε το μικροπείραμα :
https://www.geogebra.org/m/muwrssrb
και συζητείτε ¨ Το πρόβλημα της εφαπτομένης ¨

Καθοδηγούμενη συζήτηση ώστε να προκύψει ο *ορισμός της εφαπτομένης* .Σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των 2 (ανά θρανίο)

.

➢ Δραστηριότητα 2η :Ορισμός της παραγώγου

Αρχικά δίνεται ο ορισμός της παραγώγου και με κατάλληλες ερωτήσεις καταλήγουμε στο συσχετισμό της $f'(x_o)$ με τον συντελεστή διεύθυνσης _ κλίσης της συνάρτησης . Μέσα από τις ασκήσεις της Δραστηριότητας 2 του Φύλλου Εργασίας υπολογίζουν αλγεβρικά το συντελεστή διεύθυνσης ορισμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και καταλήγουν σε συμπεράσματα. Παράλληλα επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα τους – συμπεράσματα με τη βοήθεια του μικροπειράματος : https://www.geogebra.org/m/vrqprecc

➢ Δραστηριότητα 3η :Σύνδεση προσήμου της παραγώγου με την κλίση της εφαπτομένης .

Στη δραστηριότητα αυτή συνδέουν το πρόσημο της παραγώγου με την κλίση της εφαπτομένης. Τα συμπεράσματα επιβεβαιώνονται και εποπτικά με το μικροπείραμα : https://www.geogebra.org/m/mjn5qdeb

➢ Κλείσιμο του μαθήματος

➢ Αν υπάρχει χρόνος γίνονται οι ασκήσεις στο τέλος του Φύλλου Εργασίας διαφορετικά δίνονται για **εργασία για το σπίτι .**

Το Φύλλο Εργασίας είναι αναρτημένο στην eclass οπότε οποιοδήποτε στάδιο του μπορεί να γίνει και με τη μέθοδο της ανεστραμμένης τάξης .

Διδακτικά μέσα και πόροι

- Φύλλα εργασίας
- Προτζέκτορας
- Δυναμικό περιβάλλον geogebra :
- Ερωτηματικός διάλογος- καθοδηγούμενος ,ερευνητική μάθηση.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : 2.1 Η έννοια της παραγώγου

Το πρόβλημα της εφαπτομένης

Πως ορίζεται η εφαπτομένη ενός κύκλου σ΄ ένα σημείο του ;

Να κάνετε ένα κύκλο και μια εφαπτομένη του σε ένα σημείο του.

ΣΧΗΜΑ

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό για οποιαδήποτε καμπύλη;

παραδείγματα : 1)ποια είναι η εφαπτομένη της $y=x^2$ στο σημείο της Α(1,1);

2) ποια είναι η εφαπτομένη της $y=x^3$ στο σημείο της Α(1,1);

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η (Γεωμετρική Ερμηνεία της παραγώγου)

Ανοίγουμε το σύνδεσμο : https://www.geogebra.org/m/muwrssrb

και απαντάμε στις ερωτήσεις

Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΜ , αν $x \neq x_o$;

$\lambda_{AM} = \frac{\qquad}{\qquad}$

Καθώς το Μ πλησιάζει το Α , μπορούμε να πούμε ότι το x $\longrightarrow$

Αν η ε είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α , τι μπορούμε να πούμε για την οριακή θέση που παίρνει η ΑΜ όταν το Μ πλησιάζει με το Α είτε από δεξιά είτε από αριστερά;

……

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι : λ= $\lim\limits_{x \to x_o}$ — ————

και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ δίνεται από τον τύπο :

……

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : πότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f σ΄ ένα σημείο της $A(x_o, f(x_o))$;

……

……

……

ΟΡΙΣΜΟΣ Παραγώγου της f στο x_o

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **$f'(x_0)$**. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Άρα , αν αλλάζει ο τύπος της f στο x_o τότε :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο **R** τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

- Τι σχέση έχει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο $A(x_o, f(x_o))$, με το $f'(x_o)$; ……………………………………………………………………………………………………

- Το $f'(x_o)$ λέγεται και **κλίση της Cf** στο $A(x_o, f(x_o))$ ή **κλίση της f στο x_o**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η (Υπολογισμός συντελεστή διεύθυνσης αλγεβρικά)

Να βρείτε αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις εφαρμόζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, καθώς και την εξίσωση της .

A. Αν $f(x)=x^3$ στο σημείο A(1,1) και στο σημείο της O(0,0) .

Τι παρατηρείτε για την εφαπτομένη της στο O;

B. Για την $g(x)=2x-1$ στο σημείο A(1,1)

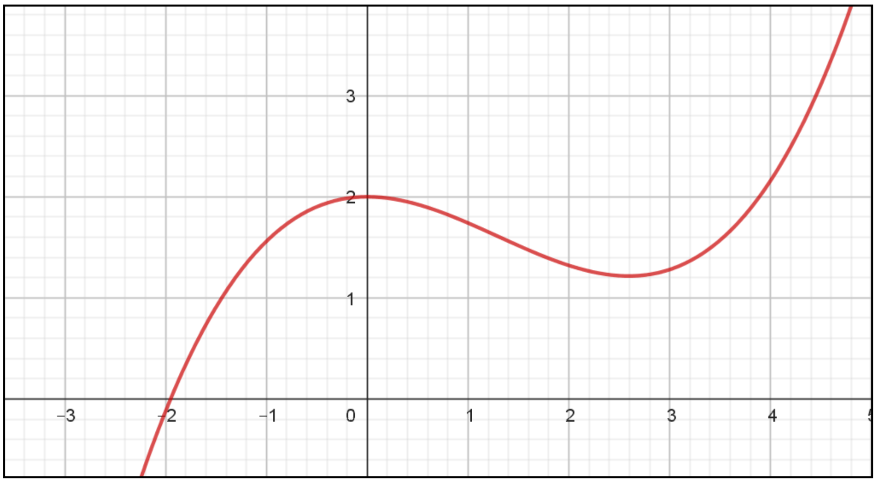
Τι παρατηρείτε για την εφαπτομένη της στα διάφορα σημεία της ;

Επαληθεύεστε τα συμπεράσματα σας παρατηρώντας και το μικροπείραμα:

https://www.geogebra.org/m/vrqprecc

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f



ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Μπορείτε με τη βοήθεια του γραφήματος να βρείτε το πρόσημο των :

f ΄(-2)

f ΄(-1)

f ΄(1)

f ΄(2)

Ποια είναι η τιμή του f ΄(0) ;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας(γεωμετρική ερμηνεία)

Επιβεβαιώστε τα συμπεράσματα σας : https://www.geogebra.org/m/mjn5qdeb

Σχόλια -Συμπεράσματα:

1. Τι σχέση έχει η εφαπτομένη της Cf μιας ευθείας f(x)=αx+β σε οποιοδήποτε σημείο της με την Cf;

2. Η εφαπτομένη της Cf σε ένα σημείο της , μπορεί να έχει και κάποιο άλλο κοινό σημείο με αυτήν ;

3. Τι σχέση έχει το πρόσημο της τιμής της παραγώγου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης στο x_o, με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$;

α) Στα διαστήματα που η f είναι γνησίως αύξουσα , κλίση της είναι..............................

β) Στα διαστήματα που η f είναι γνησίως φθίνουσα , κλίση της είναι..............................

γ) Στα σημεία που η f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο , η κλίση της είναι ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρείτε αν υπάρχει το $f\,'(x_o)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. Αν $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x<0 \\ \eta\mu x+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, την εφαπτομένη της Cf στο $x_o=0$.

Μπορείτε να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο $x_o=0$ με τον άξονα x΄x;

ii. Αν $f(x)=|x-3|$, στο $x_o=3$

iii. Αν ισχύει $x+2 \leq f(x) \leq x^2+x+2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε : $f(0)$ και $f'(0)$

Σχέδιο Μαθήματος Γθετ.

Συντάκτης: Μουρατίδου Μαρία (ΠΕ03)

Συμμετέχοντες Μελέτης Μαθήματος: Βασιλειάδου Ευαγγελία(ΠΕ03), Κουτσφετσούλη Ευανθία(ΠΕ03), Μπάμπουρας Γεώργιος(ΠΕ03), Τσίτσος Γεώργιος(ΠΕ03)

Επιμορφωτές: Εμμανουηλίδης Αριστείδης (ΠΕ04.01,Διευθυντής)

Τσαμπούκα Πετρούλα (ΣΕΕ ΠΕ03 Δυτικής Θεσσαλονίκης)

Μάθημα : Μαθηματικά προσανατολισμού Γ Λυκείου
Ενότητα : Ορισμός της παραγώγου συνάρτησης σ΄ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της .
Διάρκεια : 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι :

- Οι μαθητές να αναγνωρίζουν την παράγωγο μιας συνάρτησης , ως το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης .
- Οι μαθητές να αναγνωρίζουν το πρόσημο της παραγώγου από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης .
- Οι μαθητές να υπολογίζουν τις αλγεβρικές τιμές της παράγωγου μιας συνάρτησης με τη βοήθεια του ορισμού .

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας
- Εξίσωση ευθείας
- Η έννοια του ορίου και ο υπολογισμός του

Σύντομη περιγραφή μαθήματος

1η Διδακτική ώρα

➢ Ανάκληση των γνωστικών προαπαιτούμενων και ενημέρωση για την ενότητα που θα διδαχθούν.

➢ **Δραστηριότητα 1η : Σύνδεση με την πραγματικότητα και τις άλλες επιστήμες καθώς και Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου .** (30 min)
Αρχικά γίνεται αναφορά στην στιγμιαία ταχύτητα και έπειτα συζητείτε ¨ Το πρόβλημα της εφαπτομένης ¨
(μικροπείραμα : https://www.geogebra.org/m/muwrssrb)

Καθοδηγούμενη συζήτηση ώστε να προκύψει ο *ορισμός της εφαπτομένης* .Σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των 2 (ανά θρανίο)

.

2η Διδακτική ώρα

- **Δραστηριότητα 2η :Ορισμός της παραγώγου**
  Αρχικά δίνεται ο ορισμός της παραγώγου και με κατάλληλες ερωτήσεις καταλήγουμε στο συσχετισμό της $f'(x_0)$ με τον συντελεστή διεύθυνσης _ κλίσης της συνάρτησης . Μέσα από τις ασκήσεις της Δραστηριότητας 2 του Φύλλου Εργασίας υπολογίζουν αλγεβρικά το συντελεστή διεύθυνσης ορισμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και καταλήγουν σε συμπεράσματα.

Παράλληλα επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα τους – συμπεράσματα με τη βοήθεια του μικροπειράματος : https://www.geogebra.org/m/vrqprecc

- **Δραστηριότητα 3η :Σύνδεση προσήμου της παραγώγου με την κλίση της εφαπτομένης .**
  Στη δραστηριότητα αυτή συνδέουν το πρόσημο της παραγώγου με την κλίση της εφαπτομένης. Τα συμπεράσματα επιβεβαιώνονται και εποπτικά με το μικροπείραμα **:** https://www.geogebra.org/m/mjn5qdeb

- **Κλείσιμο του μαθήματος**

- Αν υπάρχει χρόνος γίνονται οι ασκήσεις στο τέλος του Φύλλου Εργασίας διαφορετικά δίνονται για **εργασία για το σπίτι .**

Το Φύλλο Εργασίας είναι αναρτημένο στην eclass οπότε οποιοδήποτε στάδιο του μπορεί να γίνει και με τη μέθοδο της ανεστραμμένης τάξης .

Διδακτικά μέσα και πόροι

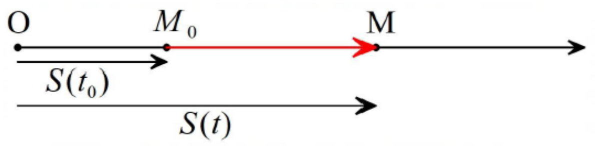
- Φύλλα εργασίας
- Προτζέκτορας
- Δυναμικό περιβάλλον geogebra :
- Ερωτηματικός διάλογος- καθοδηγούμενος ,ερευνητική μάθηση.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : 2.1 Η έννοια της παραγώγου

Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα ,κάνοντας μεταβαλλόμενη κίνηση και S=S(t) η συνάρτηση καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t.



Αν τη χρονική στιγμή t_o το κινητό βρίσκεται στη θέση M_o , τότε μετά από παρέλευση χρόνου h , δηλαδή τη χρονική στιγμή t=……………… , το κινητό βρίσκεται στη θέση Μ.

Ποια είναι η μετατόπιση του κινητού για το χρονικό διάστημα t_o έως t ;

…….

Ποια είναι η μέση ταχύτητα για αυτό το χρονικό διάστημα ;

……..

Τι νομίζετε ότι θα βρίσκαμε αν $t \to t_o$; Και πως θα το γράφαμε αυτό;

……

……..

Το πρόβλημα της εφαπτομένης

Πως ορίζεται η εφαπτομένη ενός κύκλου σ΄ ένα σημείο του ;

Να κάνετε ένα κύκλο και μια εφαπτομένη του σε ένα σημείο του.

ΣΧΗΜΑ

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό για οποιαδήποτε καμπύλη;

παραδείγματα : 1)ποια είναι η εφαπτομένη της $y=x^2$ στο σημείο της Α(1,1);

2) ποια είναι η εφαπτομένη της $y=x^3$ στο σημείο της Α(1,1);

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η (Γεωμετρική Ερμηνεία της παραγώγου)

Ανοίγουμε το σύνδεσμο : https://www.geogebra.org/m/muwrssrb

και απαντάμε στις ερωτήσεις

Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΜ , αν $x \neq x_o$;

$\lambda_{AM} = \frac{\quad}{\quad}$

Καθώς το Μ πλησιάζει το Α , μπορούμε να πούμε ότι το x $\longrightarrow$

Αν η ε είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο Α , τι μπορούμε να πούμε για την οριακή θέση που παίρνει η ΑΜ όταν το Μ πλησιάζει με το Α είτε από δεξιά είτε από αριστερά;

………

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι : $\lambda = \lim_{x \to x_o} \frac{\quad}{\quad}$

και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_o , f(x_o))$ δίνεται από τον τύπο :

……

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ *:* πότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f σ΄ ένα σημείο της $A(x_o , f(x_o))$;

………

………

………

ΟΡΙΣΜΟΣ Παραγώγου της f στο x_o

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **$f'(x_0)$**. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Άρα , αν αλλάζει ο τύπος της f στο x_o τότε :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο **R** τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

- Τι σχέση έχει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο $A(x_o, f(x_o))$, με το $f'(x_o)$;

  ………

- Το $f'(x_o)$ λέγεται και **κλίση της Cf** στο $A(x_o, f(x_o))$ ή **κλίση της f στο x_o**

- Τι σχέση έχει η στιγμιαία ταχύτητα με το $s'(t_o)$;

………

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η (Υπολογισμός συντελεστή διεύθυνσης αλγεβρικά)

Να βρείτε αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις εφαρμόζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, καθώς και την εξίσωση της .

Α. Αν $f(x)= x^3$ στο σημείο Α(1,1) και στο σημείο της Ο(0,0) .

Τι παρατηρείτε για την εφαπτομένη της στο Ο;

Β. Για την $g(x)=2x-1$ στο σημείο Α(1,1)

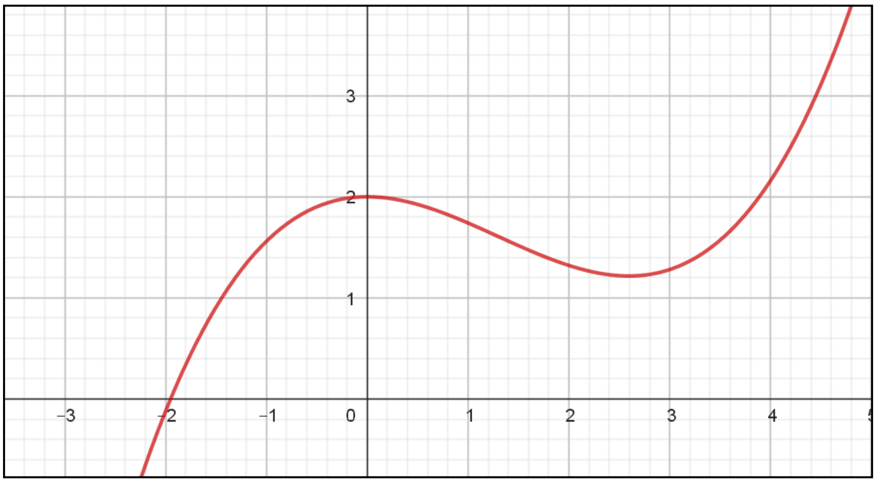
Τι παρατηρείτε για την εφαπτομένη της στα διάφορα σημεία της ;

Επαληθεύεστε τα συμπεράσματα σας παρατηρώντας και το μικροπείραμα:

https://www.geogebra.org/m/vrqprecc

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f



ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Μπορείτε με τη βοήθεια του γραφήματος να βρείτε το πρόσημο των :

$f'(-2)$

$f'(-1)$

$f'(1)$

$f'(2)$

Ποια είναι η τιμή του $f'(0)$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας(γεωμετρική ερμηνεία)

Επιβεβαιώστε τα συμπεράσματα σας : https://www.geogebra.org/m/mjn5qdeb

Σχόλια -Συμπεράσματα:

1. Τι σχέση έχει η εφαπτομένη της Cf μιας ευθείας f(x)=αx+β σε οποιοδήποτε σημείο της με την Cf;

2. Η εφαπτομένη της Cf σε ένα σημείο της , μπορεί να έχει και κάποιο άλλο κοινό σημείο με αυτήν ;

3. Τι σχέση έχει το πρόσημο της τιμής της παραγώγου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης στο x_o, με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$;

α) Στα διαστήματα που η f είναι γνησίως αύξουσα , κλίση της είναι.............................

β) Στα διαστήματα που η f είναι γνησίως φθίνουσα , κλίση της είναι.............................

γ) Στα σημεία που η f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο , η κλίση της είναι ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρείτε αν υπάρχει το $f'(x_o)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. Αν $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x} & ,x<0 \\ \eta\mu x+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, $x_o=0$.

Μπορείτε να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο $x_o=0$ με τον άξονα x'x;

ii. $f(x)=|x-3|$ στο $x_o=3$

iii. Αν ισχύει $x+2 \leq f(x) \leq x^2+x+2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε : f(0) και $f'(0)$

Lesson Study3 _ Σχέδιο Μαθήματος και Φύλλο Εργασίας

Δομή & Περιεχόμενο Σχεδίου Μαθήματος (LESSON STUDY3)

Συντάκτης: Μπάμπουρας Γεώργιος(ΠΕ03)

Συμμετέχοντες : Βασιλειάδου Ευαγγελία(ΠΕ03), Κουτσφετσούλη Ευανθία (ΠΕ03)

Μελέτης Μαθήματος: Μουρατίδου Μαρία(ΠΕ03), Τσίτσος Γεώργιος(ΠΕ03)

Επιμορφωτές: Εμμανουηλίδης Αριστείδης (Διευθυντής, ΠΕ04.01)

Τσαμπούκα Πετρούλα (ΣΕΕ ΠΕ03 Δυτικής Θεσσαλονίκης)

Θεματική του διδακτικού σεναρίου: Εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Βαθμίδα – Τάξη: Β΄ Λυκείου **Διδακτικές ώρες: Μία (1)**

Ενότητα του ΠΣ και Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):

Αναλυτική Γεωμετρία: → Εφαπτομένη κύκλου

1.1 Προσδοκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Αποδεικνύουν την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε σημείο αυτού. (ΑΓ.Κ.11.Π.2.)

Να βρίσκουν την εξίσωση τη εφαπτομένης εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο.

Λέξεις κλειδιά: Εξίσωση κύκλου, εφαπτομένη κύκλου, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, σημείο κύκλου.

1.2 Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών/τριών (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές):

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν μάθει να προσδιορίζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του κύκλου και να περιγράφουν τα στοιχεία του κύκλου (Γ.Ε.7.17.), να σχεδιάζουν με τη χρήση του γνώμονα την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του (Γ.Ε.7.18.), να διερευνούν και να προσδιορίζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (Γ.Ε.7.19.) Έχουν μάθει να διερευνούν και να αιτιολογούν εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο (Γ.Ε.8.4.), να υπολογίζουν τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους (Μ.Μ.8.1.), να χρησιμοποιούν τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων (Μ.Μ.8.2.), να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου (Μ.Ε.8.5.), να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους (Μ.Ε.8.6.).

Επίσης γνωρίζουν να τοποθετούν συντεταγμένες σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, να διαπραγματεύονται την γραφική παράσταση της ευθείας $y=αx+β$ καθώς και να αντιμετωπίζουν γραφικά και αριθμητικά την λύση ενός γραμμικού συστήματος 2x2 και να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του.

Στην Α΄ και Β΄ Λυκείου οι μαθητές μαθαίνουν να αποδεικνύουν ότι, σε ίσους κύκλους, ίσα τόξα ορίζουν ίσες χορδές και ίσα αντίστοιχα σε αυτές αποστήματα και να διατυπώνουν και ελέγχουν τους αντίστροφους ισχυρισμούς (Γ.Ε.10.16.), να κατασκευάζουν εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη (Γ.Ε.10.17.). Επίσης να ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και τη συνδέουν με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν. Μπορούν να αντιμετωπίσουν εξισώσεις και ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού και διαπραγματεύονται θέματα που αφορούν τα διανύσματα και την ευθεία.

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

2.1. Περί μαθητή και μάθησης

Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις λύσεις της εξίσωσης μιας γραμμής με τα σημεία της γραμμής. Επίσης αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν της λύσεις μιας εξίσωσης ως ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν την εξίσωση (Ιωάννου, 2011). Αν τα προβλήματα αυτά δεν έχουν αντιμετωπιστεί στο κεφάλαιο "Εξίσωση ευθείας" που προηγήθηκε και εκφράζεται με εξίσωση πρώτου βαθμού, είναι ευνόητο ότι θα περάσουν και στον κύκλο του οποίου η αναλυτική έκφραση αντιστοιχεί σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Μια έννοια που βοηθάει στο να ξεπεραστούν σε σημαντικό βαθμό προβλήματα αυτού του είδους είναι η έννοια της συνάρτησης (Ιωάννου, 2011).

Επίσης λόγω του ότι οι εφαρμογές στον κύκλο συνδυάζουν γνώσεις από τα διανύσματα, την ευθεία, την άλγεβρα και την γεωμετρία, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στο να ξεχωρίσουν τον κατάλληλο τρόπο αντιμετώπισης με αποτέλεσμα ή να εγκαταλείπουν η να οδηγούνται στην αποτυχία επιλέγοντας τον λάθος τρόπο ιδίως όταν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών είναι ελλιπείς ή υπάρχουν εσφαλμένες ιδέες και καίριες παρανοήσεις (Βοσνιάδου, 2001).

Είναι γνωστό ότι η ικανότητα των ανθρώπων να μαθαίνουν κάτι καινούριο συνδέεται με το τι ξέρουν ήδη (Βοσνιάδου, 2001). Η ενασχόληση και προσπάθεια των μαθητών με ορισμένες κατηγορίες ασκήσεων στην εφαπτομένη κύκλου τους αναγκάζει με κάποιο τρόπο να ανασύρουν γνώσεις που είτε δεν θεωρούσαν τόσο σημαντικές (πχ. θέσεις ευθείας – κύκλου) είτε τις είχαν καταχωνιάσει στο βάθος του μυαλού τους (πχ. ιδιότητες κοινής εφαπτομένης).

2.2. Δραστηριότητες

Δίνεται φύλλο εργασίας

2.2.1 Χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας που επιδιώκεται να αναδειχθούν κατά την ενασχόληση των μαθητών με καθεμία από τις δραστηριότητες

Με την πρώτη δραστηριότητα επιχειρείται οι μαθητές να μπουν στην διαδικασία ανακάλυψης της απόδειξης της εξίσωσης της εφαπτομένης του κύκλου σε σημείο του $A(x_1\ y_1)$ «ΑΓ.Κ.11.Π.2.».

Με την δεύτερη δραστηριότητα επιχειρείται να γίνει μια διαπραγμάτευση του λόγου που η χρήση διανυσμάτων είναι ποιο πλήρης από την χρήση της ευθείας στην απόδειξη της εφαπτομένης. Εδώ μπορεί να γίνει χρήση του βοηθητικού προγράμματος geogebra.https://www.geogebra.org/m/dvtww2te

Με την τρίτη και τέταρτη δραστηριότητα επιχειρείται να μπουν στην διαδικασία εφαρμογής αυτής της εξίσωσης στην περίπτωση που το σημείο επαφής του κύκλου είναι γνωστό.

Η πιθανή επέκταση είναι μια επέκταση της 4ης δραστηριότητας και έχει στόχο να γνωρίσουν οι μαθητές διαφορετικούς τρόπους εύρεσης της εφαπτομένης καθώς και να προβληματιστούν πάνω στους τρόπους αυτούς. Καλούνται δηλαδή οι μαθητές να ανασύρουν γνώσεις γεωμετρίας για την εφαπτομένη και να τους εφαρμόσουν. Επίσης τους βάζει σε διαδικασία προβληματισμού για τα υπέρ και τα κατά του κάθε τρόπου.

Η πέμπτη δραστηριότητα (αφού το σημείο δεν ανήκει στον κύκλο) δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να εφαρμόσουν είτε τον τύπο (βρίσκοντας τις συντεταγμένες x_1, y_1) είτε κάποιον από τους τρόπους της πιθανής επέκτασης. Τους δίνει δηλαδή την δυνατότητα διαπραγμάτευσης της λύσης με διαφορετικούς τρόπους. Επίσης η τελευταία ερώτηση αντιστρέφει το πρόβλημα (δίνει δηλαδή την εξίσωση ευθείας η οποία αποτελεί πιθανή εφαπτομένη).

2.3 Διδακτικές ενέργειες – διδακτικές πρακτικές

2.3.1 Ρόλος ή ρόλοι του/της εκπαιδευτικού:

Ο εκπαιδευτικός δρα ως καθοδηγητής – βοηθός παρεμβαίνοντας μόνο εκεί και όταν αυτός κρίνει ότι χρειάζεται. Ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών και με κατάλληλες ερωτήσεις προσπαθεί να καθοδηγήσει τα παιδιά στην ανακάλυψη και εφαρμογή της αντίστοιχης θεωρίας και στην σωστή αντιμετώπιση των ερωτήσεων των δραστηριοτήτων. Παράλληλα λειτουργεί και ως αξιολογητής της όλης διαδικασίας.

2.3.2 Ρόλος ή ρόλοι του/της μαθητή/τριας:

Ο Μαθητής δεν είναι ο παθητικός θεατής της όλης διαδικασίας, ο οποίος παρακολουθεί απλά μια παράδοση του καθηγητή από την οποία προσπαθεί να αντλήσει όσες πληροφορίες μπορεί, αλλά συμμετέχει ενεργά στην όλη διαδικασία. Συνεργάζεται με τους άλλους συμμαθητές της ομάδας του, συζητάει, διαπραγματεύεται, αναρωτιέται και ψάχνει τρόπους αντιμετώπισης των προβλημάτων που του τίθενται από τις δραστηριότητες. Έτσι ενισχύει τις γνωστικές του ικανότητες αλλά και τις κοινωνικές του δεξιότητες.

2.3.3 Διαχείριση του δυναμικού της τάξης:

Κατά τη Burton, «οι μαθητές προκαλούνται να εργαστούν μέσα στη δική τους μάθηση, γιατί με αυτόν τον τρόπο αποκαλύπτουν περισσότερο εκλεπτυσμένες στρατηγικές και κατανοήσεις από ότι όταν εξαναγκάζονται να αναπαράγουν αδρανή γνώση από την οποία έχουν αφαιρεθεί η πρόκληση και η δημιουργικότητα» (Φερεντίνος, 2001). Έτσι λοιπόν οι μαθητές εργαζόμενοι κατά ομάδες 2 – 3 ατόμων καλούνται να απαντήσουν στις ερωτήσεις που τίθενται στο φύλλο εργασίας. Επομένως οι απαντήσεις θα δοθούν από τους μαθητές συνεργατικά. Για να υπάρχει πραγματική συνεργασία καλό είναι (στην κρίση του εκπαιδευτικού) κάθε ομάδα να συμπληρώνει ένα μόνο φύλλο εργασίας.

2.3.4 Διαχείριση 'πρακτικών' παραμέτρων, όπως ο χρόνος και οι υλικοτεχνικές υποδομές)

Για το παρόν διδακτικό σενάριο προτείνεται 1 ώρα. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες 2 – 3 ατόμων (ανάλογα την κρίση του εκπαιδευτικού) και συνεργάζονται στις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων. Έτσι αναπτύσσουν δεξιότητες αυτοκαθοδηγούμενης μάθησης. Η πιθανή επέκταση μαζί με την $5^{η}$ δραστηριότητα προτείνονται ως ατομική εργασία για το σπίτι, διορθώνονται ανατροφοδοτούνται και επιστρέφονται στους μαθητές. Οι σωστές απαντήσεις των αντίστοιχων δραστηριοτήτων δίνονται από τους μαθητές και καταγράφονται στον πίνακα. Όσον αφορά τις υλικοτεχνικές υποδομές, οι δραστηριότητες υλοποιούνται στην αίθουσα διδασκαλίας.

3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Αξιολόγηση για μάθηση και ανατροφοδότηση του διδακτικού έργου

3.1 Αξιολόγηση μάθησης/ μαθητή

Καθόλη την διάρκεια ενασχόλησης των μαθητών με τα έργα ο καθηγητής εκτός από τον ρόλο καθοδηγητή – βοηθού αναλαμβάνει και τον ρόλο αξιολογητή. Από την $3^{η}$ δραστηριότητα είδη ελέγχεται εάν οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τον τύπο που ανακάλυψαν με την $1^{η}$ δραστηριότητα. Έτσι ο καθηγητής ταυτόχρονα αξιολογεί και τις εξής παραμέτρους:

Μπορούν οι μαθητές να ανασύρουν εύκολα τις κατάλληλες γνώσεις;

Μπορούν να βρουν τον βέλτιστο τρόπο όταν μια ερώτηση έχει διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης;

Επιτεύχθηκαν τα ΠΜΑ;

3.2 Για το διδακτικό έργο

Υπήρχε συμμετοχή από όλους τους μαθητές;

Οι μαθητές συνάντησαν ιδιαίτερες δυσκολίες κατά την εφαρμογή του σεναρίου;

Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στην τάξη;

Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στις εργασίες για το σπίτι;

4. ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ

4.1. Για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας

Ήταν επαρκής ο χρόνος ώστε οι μαθητές να ανταποκριθούν αναμενόμενα σε κάθε δραστηριότητα;

Υπήρχαν ερωτήσεις στις δραστηριότητες οι οποίες θα έπρεπε να διατυπωθούν με διαφορετικό τρόπο ή να αφαιρεθούν λόγο χρόνου ή δυσκολίας;

Οι δραστηριότητες παρακίνησαν όλους τους μαθητές να ασχοληθούν με αυτές;

4.2. Για την μαθησιακή διαδικασία

Η συνεργασία των μαθητών ήταν ικανοποιητική ή υπήρξαν προβλήματα;

Ενεργοποιήθηκαν μαθησιακές διαδικασίες και ποιές;

4.3. Για την διδακτική προσέγγιση

Κατά πόσο οι δραστηριότητες συντέλεσαν στο να μπορούν οι μαθητές να αποδεικνύουν, να βρίσκουν και να εφαρμόζουν την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου σε σημείο του.

Κατά πόσο η πιθανή επέκταση και η $5^{η}$ δραστηριότητα συντέλεσαν στο να είναι σε θέση οι μαθητές να κάνουν χρήση και άλλων μεθόδων (εκτός του τύπου) στην εύρεση της εφαπτομένης;

Κατά πόσο είναι σε θέση να εξετάζουν αν μια ευθεία εφάπτεται του κύκλου;

4.4. Για την ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού και της πρακτικής του/της (επαγγελματική ανάπτυξη)

Οι δραστηριότητες συμφωνούν με την σκοποθεσία του Π.Σ; Δίνουν δηλ. στους μαθητές την δυνατότητα να συνδέσουν και ενοποιήσουν τα πεδία της μαθηματικής επιστήμης, να αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές όπως ο συλλογισμός, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός και να αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα ψηφιακά εργαλεία (Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου, 2022)

5. ΠΗΓΕΣ/ΠΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Ο πίνακας, μαρκαδόροι, φύλλο εργασίας με τις δραστηριότητες, διαδραστικός πίνακας (εφόσον υπάρχει αυτή η δυνατότητα).

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Πώς μαθαίνουν οι μαθητές.* ΔΙΕΘΝΕΣ ΓΡΑΦΕΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΗΣ UNESCO.

Ιωάννου, Ε. τ. (2011, Φεβρουάριος). ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΣ ΣΥΝΤΟΜΑ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΝΤΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ. *Μεταπτυχιακή εργασία*. Ηράκλειο.

Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου. (2022). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στις Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Γυμνασίου. (2021). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Φερεντίνος, Σ. (2001, Μάιος 3). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση. σ. 16.

Φύλο Εργασίας

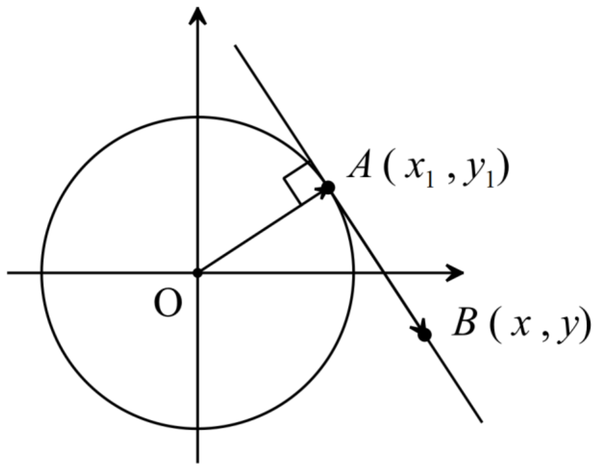
Δραστηριότητα 1

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Η εξίσωση

του κύκλου είναι: ………………..……………

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου. Για τις συντεταγμένες x_1, y_1 του σημείου Α ισχύει:

………………..………… (1)



Θεωρούμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και τυχαίο σημείο Β(x, y) της εφαπτομένης. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$

και $\overrightarrow{AB}$ είναι ……………………….. οπότε

ισχύει η σχέση:……………………………(2)

Γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα

$\overrightarrow{OA} =$ ……….. και $\overrightarrow{AB} =$ ………………….. Οπότε η σχέση (2) γίνεται:

………………………………………… και με πράξεις και σε συνδυασμό με την σχέση

(1) παίρνουμε σταδιακά ………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………..…………………………………

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του $A(x_1, y_1)$

είναι $\boxed{}$

Δραστηριότητα 2

Ο Μιχάλης, ένας πολύ καλός μαθητής, κάνοντας χρήση τις γνώσεις που αποκόμισε από την ευθεία έκανε την εξής απόδειξη:

Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ είναι $\lambda_{\text{OA}} = \frac{y_1}{x_1}$ οπότε ο

συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα είναι: $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{x_1}{y_1}$.

Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι: $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\left(x - x_1\right) \Rightarrow$

$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι αυτή η απόδειξη είναι καλύτερη και ευκολότερη.

Συμμερίζεστε την άποψη του Μιχάλη;

Υπάρχουν προβληματικά σημεία στα οποία πρέπει να δοθεί προσοχή;

Είναι ολοκληρωμένη η απόδειξη του Μιχάλη και αν όχι πως θα την ολοκληρώνατε;

Για να βοηθηθείτε ανοίξτε το αρχείο Cycle.ggb (ή το link: https://www.geogebra.org/m/dvtww2te) και μεταβάλλεται το x ώστε η εφαπτομένη να γίνει παράλληλη στους άξονες.

Δραστηριότητα 3

Σε κάθε κύκλο της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β. Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0).

στήλη Α **κύκλος σημείο (x_0, y_0)**			**στήλη Β** **εφαπτόμενη ευθεία**
1)	$x^2 + y^2 = 1$	$(0, 1)$	**Α)** $y = 1$
2)	$x^2 + y^2 = 10$	$(2, 0)$	**Β)** $2x + 4y = 10$
3)	$x^2 + y^2 = 25$	$(3, 4)$	**Γ)** $x = 5$
4)	$x^2 + y^2 = 16$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	**Δ)** $y = 0$
			Ε) $3x + 4y = 25$
			ΣΤ) $x + 4y = 32$

1	2	3	4

Δραστηριότητα 4

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$ και το σημείο Α(4, 3). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α

Πιθανή επέκταση

Στην δραστηριότητα 4 βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου:

Κάνοντας χρήση του συστήματος ευθείας – κύκλου.

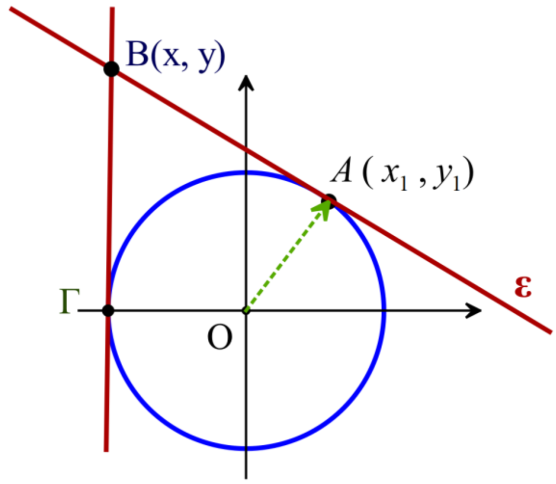
Κάνοντας χρήση της απόστασης της εφαπτομένης από το κέντρο του κύκλου.

Ποιες παρατηρήσεις έχετε να κάνετε για στους 2αυτούς τρόπους αντιμετώπισης;

Δραστηριότητα 5

Στο διπλανό σχήμα μας δίνεται η εξίσωση ενός κύκλου, ένα σημείο Β από το οποίο φέρνουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο οι οποίες τον τέμνουν στα σημεία Α και Γ.

Αν $A\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$ ποια είναι η εξίσωση του διπλανού κύκλου και ποια η εξίσωση της εφαπτομένης ΑΒ;



Γνωρίζοντας ότι η εξίσωση του παραπάνω κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 4$ και τις συντεταγμένες του σημείου $B(-2,4)$ (αλλά όχι του Α) ποια διαδικασία θα ακολουθούσατε για να βρείτε τις εφαπτόμενες ΒΑ και ΒΓ του κύκλου; Αντιμετωπίσατε κάποιο πρόβλημα με την διαδικασία που ακολουθήσατε;

Ποιες είναι οι εξισώσεις των δύο αυτών εφαπτομένων;

ε1: ……………………..………………… ε2: ………………………………………

Αν σας δοθεί η ευθεία ε: 24x+32y=80, με ποιο τρόπο θα ελέγξετε αν εφάπτεται του κύκλου; Εφάπτεται;